ANDRÁSSY ADÉL

A termelési tényezők helyettesítése és a műszaki fejlődés szétválasztása a neoklasszikusoknál*

1. A neoklasszikus termelési-, növekedési modellek alaptulajdonságai

A gazdasági növekedés neoklasszikus modelljei az 1960-as évektől a növekedés forrásainak megközelítésében finomodtak, de alaptulajdonságaik nem változtak. A modellek lényeges, meghatározó jellemzői, hipotézisei változatlanul a következők: *A makroökonómiai jelenségek magyarázata racionális individuális döntéseken alapszik.* A neoklasszikus világban a vállalkozások és a fogyasztók viselkedésére a racionalitás jellemző. *Zárt gazdaság és misztikus kompetitív piac feltételezése*, amely mind a termékpiacra, mind a munkaerő piacra érvényes. Következésképpen ezen feltételek mellett az egységnyi tőkére jutó profit minden iparágban, minden vállalkozásnál ugyanannyi, a profitráták kiegyenlítődnek. Az egységnyi munkamennyiségre jutó munkabér is egyenlő.

A modellek *teljes foglalkoztatottságot* tételeznek fel. *Nincs osztálykonfliktus* és gyakorlatilag az aggregált kereslet sem létezik ezen elméleti rendszerben, *a kínálat oldaláról fogalmazzák meg az összefüggéseket.*

A hagyományos neoklasszikus növekedési modellek mindössze két független tényezőt tartalmaznak, tőkét és munkát. Feltételezik, hogy a növekedés forrásainak mindegyike e két termelési tényezőbe vonható össze.[1] A termelési tényezők egymást korlátlanul, folyamatosan helyettesítik. A termelési technológiára a csökkenő tőke és munka hozadék jellemző, ha az input tényezőket egymástól elkülönülten kezeljük, és konstans hozadék, az inputtényezők vonatkozásában közösen.[2] A kibocsátás a tőkével és a munkával arányos.

A neoklasszikus közgazdaságtan a termelési folyamatot az inputok és az outputok, a termelési tényezők és a kibocsátás viszonyaként fogja fel. *Feltételezi, hogy a kibocsátás változása néhány input elem változására visszavezethető és az egyes termelési tényezők kibocsátásra gyakorolt hatása egymástól elkülöníthető.*

---

* A tanulmány az OTKA T/6 13487 kutatási támogatás segítségével készült.

[1] A neoklasszikus elmélet a munkaerőt és a tőkét aggregált egységként fogja fel. Habár mindkét termelési tényező rendkívül különböző elemekből áll, ezen elmélet szerint homogén tényezőként kezelhetők. A kibocsátás és a termelési tényezők neoklasszikus elméletére a Say-dogma elfogadása a jellemző, ami gyakorlatilag azt jelenti, hogy a termékpiac egyensúlyát elérjük az árak és a kamatláb változtatásával és ez a folyamat elegendően gyors és szabályos.

[2] A tőke csökkenő hozadéka adott beruházási (vagy megtakarítási) ráta mellett a tőke-munka arány és a tőke-kibocsátási hányad állandó növekedését implikálja. A munka csökkenő hozadéka azt jelenti, hogy a mun-katermelékenység növekedési rátája csökkenő adott technikai színvonal mellett.

A termelők tökéletesen informáltak, egy jószág előállításának összes technológiailag kivitelezhető eljárását ismerik, választási lehetőségeiket a megvalósítható eljárásokhoz való hozzáférés nem korlátozza. *A termelők racionálisan döntenek*, azt az eljárást, technológiát valósítják meg, amely az adott feltételek mellett optimális. A termelők az egyéni érdekeik által determinált technológiát valósítják meg.

Az önérdekeik érvényesítésére, megvalósítására törekvő gazdasági személyek adott erőforráskorlátok mellett profitjukat maximalizálják, költségeiket minimalizálják. *A lehetséges input-output kombinációk közül csak a hatékony eljárások valósulnak meg és minden megvalósított termelési tevékenység optimális.* A termelőegységek csak az optimális termelési program kivitelezésére vállalkoznak. A termelési tevékenység a hatékony (optimális) termelési eljárások megvalósításával identikus.

A profitjuk maximalizálására, illetve költségeik minimalizálására törekvő termelőegységek viselkedésmódjának leírására matematikailag a feltételes szélsőérték-feladatok (optimalizálási feladatok) alkalmasak. *A neoklasszikus termelési tevékenység felfogás implikálja, hogy a termelési folyamat matematikailag formalizálható, folytonos programozási (optimalizálási) feladat optimumai megvalósításának felel meg. A kivitelezett technológia egy zárt konvex halmazon (melynek részhalmaza a megvalósítható tevékenységek halmaza) értelmezett folytonos függvény szélsőértékeivel azonos.*

A neoklasszikus termelés felfogásra a dualitás is jellemző, a feltételes szélsőérték feladat primális feladata a profit maximalizálása, duális feladata a költségek minimalizálása.

A primális feladat:

$Y = f(K,L) \longrightarrow \max.$ (1)

adott [r_k, r_L] input árvektorok és

adott [K,L] termelési tényező vektorok mellett.

ahol: r_k = a tőke tényező ára;

r_L = a munka tényező ára.

Az f termelési függvényről feltételezzük, hogy konkáv, monoton növekvő, elsőfokú homogén.

Az (1) feladat duálisa

$c = C(r_k, r_L) \longrightarrow \min.$

adott [r_k, r_L] input-árvektorok és adott Y kibocsátási színvonal mellett.

A $C = C(r_k, r_L)$ költségfüggvény pozitív, folytonos függvény, elsőfokú homogén és konvex.

A termelési tevékenység neoklasszikus megközelítése a piaci szereplők racionális viselkedése és zárt, kompetitív piac feltételezésén alapul. A termelőegységek racionális viselkedésének feltételezése az optimalizációs feladat célfüggvényét determinálja, a zárt, kompetitív piac feltételezése pedig biztosítja, hogy az optimumok megvalósulnak és a gazdaságban versenyegyensúly alakul ki.

Az önérdekeik által vezérelt gazdasági személyek érdekellentétei a kompetitív piac versenyegyensúlyában oldódnak fel. A termelőegységek racionális viselkedése és zárt gazdaság, kompetitív piac feltételezése egyensúlyt (optimumot) alakít ki.

A kialakult egyensúly Pareto értelemben optimális, azaz a termelőegységek mindenkor olyan termelési technológiát valósítanak meg, amelyhez viszonyítva nincs olyan másik technológia, amely ugyanazon tényező felhasználás mellett nagyobb kibocsátást eredményezne, illetve ugyanazon kibocsátást valamely termelési tényezőből kevesebbet felhasználva állítana elő anélkül, hogy valamely más termelési tényező felhasználását ne növelné.

A neoklasszikus termeléselméleti felfogás termelési és költségfüggvényeken[3] alapszik. Termelési függvény értelmezésük - mivel szerintük a termelés az optimális programmal identikus - a megvalósítható termelési tevékenységek közül csak a hatékony termelési eljárásokra terjed ki.[4] A rendelkezésre álló erőforrások adott mennyiségéhez az inputok és az adott technológia által megengedett legnagyobb előállítható termékmennyiséget rendeli. A költségfüggvények szintén csak a hatékony eljárásokat tartalmazzák, azon termelési tevékenységeket ábrázolják, amelyek adott kibocsátást minimális költségek mellett állítanak elő. A termelési és költségfüggvények analitikusan jól kezelhető formában ábrázolják a neoklasszikus elmélet termelési folyamatra vonatkozó megközelítését.

A neoklasszikusok a kibocsátást általában mindössze két termelési tényezőre, tőkére és munkára vezetik vissza.[5] Mivel termelési függvényük maximális outputot reprezentál, a függvényértelmezés minden tőke-munka kombinációnál csak arra a technológiai eljárásra terjed ki, amely adott erőforrások mellett maximális output elérését teszi lehetővé:

$$Y = f(K,L)$$

ahol: Y = a (K,L) tényezőkkel megvalósítható maximális kibocsátás.

A költségfüggvény minimális költségeket biztosító termelési eljárásokat ölel fel, azon termelési eljárásokat tartalmazza, amelyek adott termelési kibocsátás minimális (K,L) ráfordítások melletti előállítását teszik lehetővé.

---

[3] Egy termék esetében a termelési függvényt általában a következőképpen szoktuk értelmezni: y kibocsátáshoz n-féle különböző homogén termelési tényezőt használnak fel. Termelési (vagy transzformációs) függvénynek nevezzük azt a hozzárendelést, amely a rendelkezésre álló termelési tényezők adott mennyiségéhez az általuk és az adott technológia által megengedett legnagyobb előállítható termékmennyiséget rendeli. Analitikus formája $y=y\,(x_1...x_n)$

ahol: y = az $(x_1,...,x_n)$tényezőkkel megvalósítható maximális output;

x_i = az i-dik inputelem felhasznált mennyisége

$i \in \{1,...n\}$

Több termék esetében a termelési függvény általános alakja:

$f\,(y_i,...,y_n;\, x_1,...,x_n)=0$

ahol: y_i = az i-dik termékből a maximális kibocsátás x_j inputelemek mellett;

$i \in \{1,...m\}\ i \neq j$

x_j = a j-edik inputelem

$j \in \{1,...n\}\ i \neq j$

A költségfüggvény a költségek (c) és a termelési tényezők árai, valamint a kibocsátás közötti összefüggést formalizálja

$C = C\,(Y, r_i)$

ahol: C = a teljes költség minimuma;

Y = az output;

r_i = az i-dik termelési tényező ára.

Mivel a termelési és a költségfüggvények csak a hatékony termelési eljárásokat foglalják magukba, így csak a technológiai halmaz határfelületéhez tartozó tevékenységeket tartalmazzák.

[4] A termelési függvényeket lehet úgy is értelmezni, hogy a függvény-értelmezés minden technológiailag kivitelezhető, megvalósítható tevékenységre kiterjed, amelyek között hatékonyak *és* nem hatékonyak egyaránt lehetnek. Ebben az értelemben a termelési függvény a technológiai halmaz sajátos megjelenítési módja. A neoklasszikus termelési függvény mögött az a feltételezés húzódik meg, hogy a technológiailag lehetséges, megvalósítható tevékenységek közül a nem hatékony tevékenységeket gazdasági-műszaki paraméterek ismeretében a termelési függvény megszerkesztése *előtt* kiszűrték, és a termelési függvény *csak* a hatékony tevékenységeket foglalja magába.

[5] A neoklasszikus termelési függvény olyan f: $R_+^2 \to R_+^1$ leképezés, amely $K,L \in R_+^2$ inputokhoz az általuk, és az adott technológia által megengedett legnagyobb előállítható kibocsátást (Y) rendeli.

A neoklasszikusoknál a termelés expanzióját a természeti környezet nem korlátozza. A népesség és a munkaerő növekedése e modellekben exogén változók; a humán tőkének és a kormányzati politikának nincs határozott, növekedést gerjesztő szerepe. A munkaerő kínálata konstans bérrátánál korlátlan. A növekedési modellek első változatainál a technikai fejlődés[6] *exogén módon adott.*

A profit egészét megtakarítják, a bért teljes egészében fogyasztási célokra költik. Az output megoszlása input javakra és fogyasztási javakra megegyezik a jövedelem profitra és bérre történő megoszlásával.[7] A megtakarítások ex post megegyeznek a beruházásokkal, a megtakarítások automatikusan beruházásokká válnak. Következésképpen a neoklasszikus modelleknél a *jövedelem-elosztás az aggregált kereslet fő meghatározója,* a profit-jövedelem részarányának növekedése növeli a megtakarításokat és a beruházásokat. *A jövedelem felosztásának változása függ a tőke-koefficiens változásától és a beruházások a jövedelemelosztási viszonyokkal együtt változnak.*

Ezen feltételek mellett a modellek egy "kiegyensúlyozott" pálya menti növekedést írnak le, amelynél az egy főre jutó ki-bocsátás és a fogyasztás növekedési rátája megegyezik az egy főre jutó tőke akkumulációs rátájával, a megtakarítási ráta és a reálkamatláb konstans.

A tőkeállomány növekedési rátája, $\frac{K'}{K}$ irányítja a kibocsátás növekedési rátáját. A tőke növekedési rátája függ a jövedelem megtakarítási részarányától s-től, és a tőkekoefficienstől, v-től. Mivel feltételek szerint a profitot megtakarítják és beruházásra fordítják, a munkabért pedig elfogyasztják, a jövedelem profit aránya meghatározza a tőkeakkumuláció rátáját. A tőkefelhalmozási ráta pedig meghatározza a munkaerő foglalkoztatottsági rátáját.[8]

A gazdasági növekedés egyensúlyi üteme:

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{K'}{K} = \frac{I}{Y} \div \frac{K}{Y} = \frac{s}{v}$$

$$s = \frac{I}{Y} = Gv$$ [9]

ahol: G = az outputkapacitás növekedési rátája, $G = \frac{s}{v}$;

v = a tőke/output arány, a tőkekoefficiens; $= \frac{K}{Y}$

I = a nettó beruházás;

s = a jövedelem megtakarítási (beruházási) aránya;

---

[6] Itt és a továbbiakban a technikai-technológiai fejlődés, műszaki fejlődés fogalmakat szinonímaként használom.

[7] A termelési tényezők tőke és munka tényezőbe történő összevonásából következik, hogy a jövedelemnek is két formája van: profit és munkabér.

[8] Mivel a feltételezések szerint a foglalkoztatottsági ráta ugyanazon rátával nő mint a tőke, így nem változik az egy főre jutó tőke nagysága.

[9] A beruházás-output hányad, vagy a jövedelem megtakarítási részaránya független változó. A Harrod-féle növekedési modell alapján a beruházás-output viszonyt az output kapacitás növekedési rátája (G) és a tőke-koefficiens (v) határozza meg.

$$\frac{I}{Y} = Gv$$

Teljes foglalkoztatottság állapotában a tőke kapacitás növekedési rátája meg kell, hogy egyezzen a teljes foglalkoztatottság növekedési rátájával, azaz a technikai fejlődés rátájának és a munkaerő növekedési rátájának (a Harrod-féle "természetes növekedési ráta") összegével.

$$\frac{I}{Y} = \text{a beruházási ráta.}$$

Ha a megtakarítások forrása a profit és a profitot teljes egészében beruházásra fordítják, a bért pedig fogyasztásra, akkor a jövedelem profit aránya meghatározza a tőke akkumulációs rátáját, hiszen:

$$\frac{P}{Y} = Gv = G\frac{K}{Y}.$$

De mivel

$$\frac{P}{K} \equiv \frac{P}{Y} \cdot \frac{Y}{K} = G\frac{K}{Y} \cdot \frac{Y}{K}$$

$$\text{Így } \frac{P}{K} = G$$

Tehát neoklasszikus feltételek mellett a tőke növekedési rátája megegyezik a profitrátával.[10] Az egyensúly feltétele, hogy a természetes növekedési ráta egyezzen meg a tőke növekedési rátájával, azaz a teljes foglalkoztatottság feltételezése mellett:[11]

$$\frac{K}{K} = \frac{s}{v} = n$$

$$I = sY = nv$$

Osszuk el mindkét oldalt a megtermelt jövedelemmel, Y-al:

$$\frac{P}{Y} = \frac{I}{Y} = s$$

$$\text{ahol: } \frac{P}{Y} = \text{a jövedelem profithányada.}$$

Ugyanakkor a beruházási ráta a tőkeállomány növekedési rátájának és a tőkekoefficiensnek a szorzata:

$$\frac{I}{Y} \equiv \frac{I}{K} \cdot \frac{K}{Y} = \frac{I}{K} \cdot v$$

$$\text{ahol: } \frac{I}{K} = \text{a tőkeállomány növekedési rátája.}$$

A neoklasszikus növekedési modellek elsőfokú homogén termelési függvényeket alkalmaznak:

Y = F(K,L)

ahol: Y = a kibocsátás;
K = a tőke;
L = a munka.

---

[10] A profitráta egyensúlyban a növekedési ráta függvénye, így a felhalmozási ráta a gazdasági növekedés rátájának függvénye.

[11] A garantált növekedési rátának egyensúlyban meg kell egyeznie a természetes növekedési rátával, azaz $\frac{s}{v} = n$

Az egy főre jutó termelés, $y = \frac{Y}{L}$ a tőkeintenzitás, $k = \frac{K}{L}$ függvénye:

$$y \equiv \frac{Y}{L} = F(k,1) = f(k)$$

ahol: $$\frac{dy}{dk} = f'(k) > 0$$
$$\frac{d^2y}{dk^2} = f''(k) < 0$$

Mivel minden vállalkozó minden időben korlátozott nagyságú tőkével rendelkezik, az egy főre jutó tőke nagysága, $k = \frac{K}{L}$ meghatározza a maximálisan elérhető profitrátát,

$\pi = f'(k)\frac{k}{f(k)}$ összefüggés szerint.[12]

Ha a termelési függvény elsőfokú homogén, akkor a határtermelékenységi elmélet feltételezése alapján a jövedelem a tényezők jövedelmére bomlik. A határtermelékenységi elmélet, mint jövedelemelosztási elmélet szerint kompetitív piac feltételezése esetében, a termelési tényezőknek határtermékeit fizetik ki reáljövedelemként, illetve a határterméknek és a termék árának szorzatát pénzjövedelemként.[13]

A termelési tényezők árait a tényezők hozadékai, a határtermelékenységek határozzák meg. Következésképpen az inputárak a $k = \frac{K}{L}$ tőkeintenzitással, a $v = \frac{K}{Y} = \frac{k}{f(k)}$ tőkekoefficienssel és a $\pi = f'(k)\frac{k}{f(k)}$ profitrátával is összefüggnek.

Az egy főre jutó tőke nagysága a jövedelem munkabér-arányának a függvénye:

$$\frac{K}{L} = g_1(w) \text{ ahol: } g_1' > 0,\ g_2'' < 0$$

Azaz az egy főre jutó tőke nagyobb, ha nagyobb a munkaerő jövedelemaránya (munkát tőkével helyettesítenek).

A tőkekoefficiens szintén függ a jövedelem munkabér-arányától:

$$v \equiv \frac{K}{Y} = g_2(w) \text{ ahol: } g_2' > 0,\ g_2'' < 0.$$

Azaz a tőke-kibocsátás arány nő, ha nő a munkaerő jövedelme (munkát tőkével helyettesítenek és így nő a tőke-koefficiens).

z egy főre jutó termelés a tőkekoefficiens növekvő függvénye:

---

[12] $$\pi = \frac{rY}{K} = \frac{dy}{dk} \div \frac{y}{k} = f'(k) \div \frac{f(k)}{k} = f'(k) \cdot \frac{k}{f(k)}$$

ahol: r = a jövedelem profit részaránya.

[13] A tőke és a munka határterméke a profitmaximalizálásra vonatkozó feltevés miatt meg kell egyezzen a munka és a tőke szolgálatainak kínálati árával.

$$y \equiv \frac{Y}{L} = g_3(v) \text{ ahol: } g_3' > 0,\ g_3'' < 0.$$

Azaz az egy főre jutó termelés nő, ha nő a tőke-koefficiens.

2. A neoklasszikus termelés-, növekedés-elmélet kritériumai

A neoklasszikus növekedési termelési modellek egyik alapvető *kritériuma,* hogy a termelési függvény folytonos és legalább kétszer folytonosan differenciálható. *Minden inputbeli növekedés pozitívan hat az outputra,*[14] azaz a termelési függvény elsőrendű parciális deriváltjai pozitívak:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} > 0, \qquad \frac{\partial Y}{\partial L} > 0.$$

Ebből következik, hogy a konstans termékgörbe csökkenő, (negatív meredekségű), azaz dK = -g(dL), ahol g pozitív függvénye K-nak és L-nek. Ha mindkét tényező nagyobb, mint nulla, akkor konstans output esetében, ha az egyik tényező nő, a másik tényező szükségszerűen csökken.

Csupán egyetlen termelési tényező felhasználásával nem jön létre termelés:

F (O,L) = 0, F (K,O) = 0 minden (K,L) input elemek esetében.

A neoklasszikus termelési-növekedési elméletben a növekedés folyamatainak ábrázolása, a termelés bővülésének, a műszaki fejlődés folyamatának megjelenítése meglehetősen sajátos. *Az elmélet elkülöníti egymástól a tőkefelhalmozás változásai (azaz a termelékenység változásai) és a technikai felszereltség változásai (azaz a tőke-munka arány változásai) hatásait. A volumen hozadék (a termelés méreteinek növekedése), és az egyes termelési tényezők növekedésének hatását szintén megkülönböztetik.*

A tőkefelhalmozás és a műszaki fejlődés hatása megközelítésükben élesen különválik. A tőkeakkumuláció hatását a termelési függvény *mentén* történő elmozdulásként, a technikai ismeretek állapotának változását a termelési függvény *eltolódásaként* fogják fel.[15] *Míg a tőkefelhalmozás nem változtatja meg a termelési függvény alakját, addig a technikai haladás eredményeként a termelési függvény megváltozik, a termelés növekedésének felső korlátja eltolódik.* A műszaki fejlődés eredményeként a csökkenő hozadék szférája az origótól jobbra, felfele eltolódik.

A neoklasszikus termelési modell *második kritériuma:* a termelési tényezők határtermékének korlátja nulla, ha a tényezők végtelenül nőnek.[16]

$$\lim_{L \to \infty} F_L(K, L) = 0 \text{ és } \lim_{K \to \infty} F_K(K, L) = 0$$

[14] A termelési függvény monoton növekvő R_+^2-ön.

[15] A termelési tényezők közötti helyettesítés és a műszaki fejlődés neo-klasszikus termelési modellbeli kifejezésével a következő fejezetben (II. 3. fejezet) részletesen foglalkozom.

[16] E kritérium fordítottja is igaz: minden K>0 és L>0-nál az elsőrendű parciális deriváltjai végtelenbe tartanak, valahányszor az adott erőforrás mennyisége 0-hoz tart.

$$\lim_{k \to 0} F_k(K, L) = \infty \text{ és } \lim_{L \to 0} F_L(K, L) = \infty$$

Következésképpen *a kibocsátásnak van egy felső korlátja, amit a termelés nem haladhat meg, ha az egyik termelési tényező végtelenül nő, miközben a másik tényező konstans.*

Azaz

$$\lim_{L \to \infty} Y = M_1 \quad \text{és} \quad \lim_{K \to \infty} Y = M_2,$$

ahol M_1 és M_2 pozitív konstansok.[17]
A termelési függvénynek tehát van aszimptótája, amit a kibocsátás növekedése nem haladhat meg az egyik tényező adott, konstans felhasználása és a másik termelési tényező folyamatos növelése mellett. A termelés felső korlátja a technikai haladás eredményeként egyre magasabb termelési szintre tolódik el.

A növekedés folyamatában a felhasznált termelési tényezők mennyisége, a köztük levő arányok állandóan változnak. A tényezők közötti arányok folyamatos változtatása következtében a mennyiségében növelt tényező *egy adott technikai színvonal mellett* egyre kevésbé képes helyettesíteni a változatlan szinten tartott termelési tényezőket. Egy-egy input elem növekvő mennyiségei egyre kevésbé növelik az outputot, egyetlen termelési tényező hozadéka csökkenő. *A neoklasszikus termelési-növekedési elmélet feltételezi, hogy az egy főre jutó tőke csökkenő hozadékú, az egy főre jutó kibocsátás növekedési rátája az egy főre jutó tőke színvonalának csökkenő függvénye. A beruházás hozama csökkenő.*[18]

A neoklasszikus termelési függvények *harmadik kritériuma: a releváns tartományon belül mindegyik termelési tényező határterméke csökken, ha a termelési tényező nő.*[19]

A konstans termékgörbe konvex az origóra:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} < 0.$$

A negyedik kritérium a volumenhozadékkal kapcsolatos. Az általános termelési függvény a priori nem specifikálja a volumenhozadékot. Homogén függvényeknél matematikailag csökkenő, konstans és növekvő volumenhozadék, azaz bármilyen homogenitási fok feltételezése megengedett. *A neoklasszikus termelési függvények a konstans volumenhozadék hipotézisét alkalmazzák.*

Ha valamennyi termelési tényezőt növeljük, vagyis ha a termelés méretei nőnek, akkor a neoklasszikus növekedési elmélet a konstans skálahozadék hipotézisét alkalmazza. A hagyományos neoklasszikus termelési-növekedési modellek, egyik jellegzetessége, hogy valamennyi termelési tényezőre (a tőkére, és a munkára) *közösen, együttesen konstans volumenhozadékot*[20] *tételeznek fel.*

---

[17] A termelési függvény szigorúan konkáv R_+^2-ön.

[18] Ramsey, F. P. [1928], Cass, D. [1965], Koopmans, T. C. [1965].

[19] Ez egyébként az egyensúly elegendő feltétele.

[20] A konstans skálahozadék feltételezéséből következik, hogy

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K \partial L} > 0.$$

A neoklasszikus modelleknél a tőke és a munka egymás komplementerei Edgewort-Pareto értelemben.

A konstans volumenhozadék hipotézise elsőfokú homogén termelési függvény feltételezésével ekvivalens, azaz két termelési tényező (K tőkeállomány és L munkamennyiség) esetében bármely λ valós szám esetében

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K,L).$$

A konstans volumenhozadék feltételezése a kompetitív piacon egyensúlyt hoz létre.[21] A versenyegyensúlyt ugyanis egy optimalizációs feladat megoldásaként értelmezzük. Mivel korlátos és zárt konvex halmazokon értelmezett folytonos függvényeknek van maximumuk illetve minimumok, így konstans skálahozadék esetében minden egyes esetben van az optimalizációs feladatnak megoldása. Ugyanakkor csak elsőfokú homogén függvényeknél érvényesek a neoklasszikus elmélet elosztási tételei és a határtermelékenységi tételek.

Elsőfokú homogén termelési függvény feltételezése egyrészt lehetővé teszi az optimum létezését, másrészt csak ekkor érvényesek a neoklasszikus növekedési elmélet ismert, szokásos következtetései. Csak konstans skálahozadék feltételezése esetében igaz az, hogy a tényezők szolgálatának értékét a termelési tényezők határhaszna határozza meg, hogy a tényezőket határtermékük és a termékár szorzata alapján díjazzák. A tényezők összjövedelme elsőfokú, homogén termelési függvény mellett kimeríti az össztermelést, az egész nettó termékmennyiséget kifizetik a tényezőknek jövedelemként. A konstans skálahozadék feltételezése szükséges ahhoz, hogy a tényezők megkaphassák határterméküket. "Zavartalan verseny esetén... a jövedelemelosztásnak a határtermelékenységi elmélet alapján való levezetése feltételezi, hogy a termelési függvény elsőfokú homogén."[22]

Egyensúlyban a határhozadék arányok megegyeznek a tényezőár-arányokkal, illetve a termelési költség változásának arányai megegyeznek a tényezőarányokkal:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial K}\right) / \left(\frac{\partial F}{\partial L}\right) = -\frac{r_K}{r_L}$$

$$\left(\frac{\partial c}{\partial r_K}\right) / \left(\frac{\partial c}{\partial r_L}\right) = -\frac{K}{L}$$

Növekvő skálahozadék feltételezése esetében nem érvényesek a neoklasszikus játékszabályok, tételek és a határtermelékenységi elmélet tételei. Nincs kompetitív piac; helyét monopolpiac veszi át; a gazdaságban nincs Pareto egyensúly, de a kibocsátás modellezése megoldható egy "jól viselkedő", pozitív modellel.[23] A termelési tényezők jövedelme nem egyezik meg a határtermelékenységükkel, és a jövedelemelosztást nem a tényezők határtermelékenysége határozza meg.

Elsőfokú homogén termelési függvény feltételezése azért szükséges, mert csak ebben az esetben érvényesek a neoklasszikus és a határtermelékenységi elmélet tételei. Alkalmazása számos előnnyel jár; konstans skálahozadék mellett ha valamennyi

[21] Növekvő skálahozadék feltételezése az endogén növekedési elmélet egy modellcsoportjának jellegzetessége. Ezen modelleknél a megfogható inputok (a tőke és a munka) és a nem megfogalmazható inputok (humán tőke, technikai ismeretek, stb.) hozadéka növekvő. Növekvő hozadék esetében bármely λ valós számra

$$F(\lambda K, \lambda L, \lambda I) > \lambda F(K,L,I)$$

ahol: I = az ismeretállomány.

[22] *Mátyás* Antal [1979] 88. p.

[23] *Romer* [1986]

tényezőt ugyanolyan arányban változtatjuk nem változik a tényezők határtermelékenysége, átlagtermelékenysége, termelési rugalmassága.[24]

Az i-edik input tényező átlagtermékének elaszticitása λ skálatényezőre:

$$\frac{d\left(\frac{y}{x_i}\right)}{d\lambda}\,\frac{\lambda x_i}{y} = \frac{dy}{d\lambda}\,\frac{\lambda}{y} - \frac{dx_i}{d\lambda}\,\frac{\lambda}{x_i} = \varepsilon - 1$$

i=1,2,...,m

Azaz bármely input elem változása következtében az átlagtermék attól függően nő, változatlan, vagy csökken hogy a skálahozadék $\varepsilon \overset{>}{\underset{>}{=}} 1$. Az i-dik termelési tényező változásánál az átlagtermék nő, ha a termelésre növekvő skálahozadék jellemző, konstans, ha a skálahozadék konstans és csökken, csökkenő skálahozadék esetében.

Konstans skálahozadék mellett a tényezők határterméke nem változik, ha valamennyi tényezőt ugyanolyan arányban változtatjuk. Ugyanez igaz az át-lagtermékre is. A Wicksell-Jonson tétel szerint konstans skálahozadék esetében az egyes tényezők határtermelékenységükkel szorzott összege 1-el egyenlő:

$$1 = \frac{\partial y}{\partial x_i} x_1 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n} x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x} x_i$$

Konstans skálahozadék esetében a Wicksell-Johnson tétel megegyezik az Euler tétellel.

Azt a pontot, ahol a termelés maximális, azaz ahol a határtermék 0, technikai maximumának, vagy az intenzív határérték pontjának nevezzük. Azt a pontot, ahol az átlagtermék maximális, megegyezik a határtermékkel technikai optimumnak, vagy az extenzív határéték pontjának nevezzük.

A technikai optimum és a technikai maximum között mind az állandó, mind a változó tényezők termelési rugalmassága kisebb, mint 1, de nagyobb mint 0, mindkettő határterméke pozitív, csak e két határon belül helyettesíti a két tényező egymást abban az értelemben, hogy ha egyik tényező mennyiségét folyamatosan csökkentjük, mindig lehet a másik mennyiségét annyival növelni, hogy az összhozam ne változzon.

Ebből következik, hogy $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 y}{\partial x_{ij}^2} x_i = 0 \qquad j \in \{1,\ldots,n\}$

Az (1) és (2) egyenletekből látható, hogy konstans skála-hozadéknál:

a) Ha egy termelési tényezőt optimális szinten használnak fel a termelésben, akkor minden más tényező felhasználása maximális,

b) Nem lehet minden termelési tényezőt a technikai optimum szintjén termelésbe állítani,

---

[24] A skálahozadék (ε) és az egyes parciális termelési elaszticitások közötti viszonyt a Wicksell-Johnson féle tétel szerint:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n$$

Azaz az egyes parciális termelési elaszticitások összege homogén függvények esetében a skálahozadékkal egyenlő. *Ferguson*, E.: [1968] 83. p.

c) A helyettesítési tartományon belül minden termelési tényezőt a technikai optimum feletti szinten alkalmaznak a termelési folyamatban.

A neoklasszikus Y=F(K,L) termelési függvény, mint feltételes szélsőérték-számítási feladat a következőképpen fogalmazható meg:

$-\lambda F(K, L) \rightarrow \min.$ $\quad \lambda > 0$

feltéve, hogy

K,L felülről korlátosak, azaz

$g_i = x_i - \bar{x}_i \leqq 0$ $\quad (x_i=K,L)$

$x_i \geqq 0$ $\quad i \in \{1,2\}$

F(K,L) konkáv függvény a feltételezések szerint, így -F(K,L) konvex. F(K,L) differenciálható függvény, így a feladat Lagrange-függvénye a következő:

$$\phi = \lambda F(K, L) + \sum_{i=1}^{2} r_i g_i .$$

A Kuhn-Tucker feltételek:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\lambda \frac{\partial F}{\partial x_i} + r_i \geqq 0 \quad \text{vagy} \quad \lambda \frac{\partial F}{\partial x_i} \leqq r_i$$

ha $x_i=0$, akkor $\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \geqq 0$

$x_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0$, tehát

ha $x_i>0$, akkor $\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0$

$x_i \geqq 0$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r_i} = g_i - \overline{x_i} \leqq 0$$

ha $g_i=0$, akkor $r_i \geqq 0$

$r_i \frac{\partial \phi}{\partial r_i} = 0$, tehát

ha $g_i < 0$, akkor $r_i = 0$

$r_i \geqq 0$, $i \in \{1,...,n\}$.

Eredményként kapjuk, hogy minden hatékony termelési pontot az árnyékárak értékelnek, ahol az i-dik tényező ára, r_i arányos az i-dik tényező határtermékével:

$$r_i = \lambda \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Ha egy tényezőt technikailag maximálisan lehet alkalmazni a termelésben, akkor $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$. Csak azoknak a tényezőknek pozitív az értéke, amelyek nem elegendő mértékben állnak rendelkezésre.

A neoklasszikus termelési függvény, mint optimalizációs feladat az általános szélsőérték-számítási feladat speciális esete.

A feladat duálisa a következő:

$$-\lambda F(K, L) + \sum_{i=1}^{2} r_i(x_i - \overline{x_i}) \to \max$$

feltéve, hogy

$$k_i = -\lambda \frac{\partial y}{\partial x_i} + r_i \geqq 0$$

$$x_i\left(-\lambda \frac{\partial y}{\partial x_i} + r_i\right) = 0$$

$$h_i = x_i - \overline{x_i} \leqq 0$$

$$h_i = r_i h_i = 0$$

$$r_i \geqq 0$$

$$x_i \geqq 0 \qquad i \in \{1,2\},$$

3. A műszaki fejlődés és a tőkefelhalmozás hozadékának szétválasztására irányuló néhány kísérlet értékelése

A modern növekedéselmélet alapjait Harrod és Domar teremtették meg (Harrod [1948], Domar [1947]). A gazdasági növekedés folyamatának modellezésével alapvetően arra a kérdésre keresték a választ, hogy melyek a "kiegyensúlyozott" növekedés feltételei. A feltett kérdésre klasszikus, egyszerű válaszuk: az egyensúlyi ütem a megtakarítási (beruházási) ráta és egyensúlyi tőkekoefficiens függvénye, egyensúlyban a kibocsátás és a tőke növekedési rátája a megtakarítási ráta és a tőkekoefficiens hányadosával egyezik meg, valamint megegyezik a munkakínálat növekedési ütemével.[25] Ekkor és csakis ekkor a

[25] A Harrod-Domar féle egyenlőség:

$\frac{Y}{Y} = \frac{K}{K} = \frac{s}{v}$, ahol $s = \frac{S}{Y}$ a jövedelem megtakarítási aránya; $v \equiv \frac{K}{Y}$ az egyensúlyi növekedés melletti tőkekeoefficiens.

Folyamatos teljes foglalkoztatottság állapotában a kibocsátás növekedési rátája megegyezik a népesség növekedési rátája és a technikai fejlődés növekedési rátája összegével: $\frac{Y}{Y} = \frac{s}{v} = n + l$, ahol n = a népesség növekedési rátája;

l = a munkatermelékenység növekedési rátája.

Solow [1956] bebizonyította, hogy ha „s" nő, akkor a kibocsátás növekedési rátája rövid távon nő, de hosszú távon v ugyanolyan arányban nő, mint s, $\frac{s}{v}$ növekedési rátája egyenlő lesz a munkaerő növekedési rátájával.

gazdaság egyensúlyban tudja tartani a tőke-állomány növekedést a munkaerő kínálattal úgy, hogy a kiegyensúlyozott növekedés lesz a jellemző munkaerő hiány/felesleg megjelenése nélkül.

A modell gyakorlati alkalmazása komoly nehézségekbe ütközik. A Harrod-Domar féle egyenlet, mint a gazdasági növekedés kielégítő leírása többoldalról támadható. Egyrészt a modell csak akkor alkalmazható, ha mindhárom kulcsalkotórésze konstans. Ténylegesen azonban mindhárom alkotórész időről-időre változhat, egymástól többé-kevésbé független értékeket vehet fel. A megtakarítási ráta a jövedelemtulajdonosok preferenciarendszerének következménye-ként változhat, a munkaerő kínálat növekedése demográfiai-szociológiai tény, a tőke-output hányadot alapvetően az alkalmazott technológia határozza meg. Azaz a valóságban a Harrod-Domar modell alkotórészei csak véletlenül egyezhetnek meg egymással és így az állandó, egyenletes növekedés a szerencsének és a véletlen egybeesésének egy megnyilvánulása. Másrészt e modell alapján a jelentős munkaerő-tartalékokkal rendelkező országoknak a növekedés gyorsítása érdekében mindössze annyit kellene tenniük, hogy megemelik a beruházási rátát. A gyakorlat azonban ezen elméleti összefüggést nem igazolja, nem ilyen egyszerű a növekedés felgyorsítása.

Solow a Harrod-Domar modellbeli konstans tőke-output (és munkaerő-output) koefficienseket a technikai fejlődés realistább és gazdagabb világával helyettesítette. Úgy vélte, hogy habár a termelési technológia egy adott időben nem szélsőségesen nagy számban áll rendelkezésre, de az aggregált tényező-intenzitásnak változónak kell lennie, hiszen a különböző tőke-intenzív, munka-intenzív, vagy föld-intenzív technológiák közül lehet választani. A gazdasági fejlődés nem vezethető vissza pusztán a munka- és tőkeráfordítás növekedésére, a növekedésben jelentős szerepe van a termelékenység növekedésének. A technikai fejlődés a növekedés egyik fontos tényezője, a növekedés tényezői közötti szerepeltetése a növekedés folyamatának pontosabb kifejtését teszi lehetővé.[26]

Solow [1956] azt javasolta, hogy a gazdasági növekedést egy standard neoklasszikus, konstans hozadékú termelési függvény segítségével tanulmányozzuk.[27] Modellje a megtakarítási rátát, a népesség növekedését és a technikai változást exogénként kezeli, és azt vizsgálta, hogy ezen változók hogyan determinálják az egy főre jutó jövedelem növekedését.

A technikai haladás exogén változókénti felfogása az idő függvényében ábrázolja a műszaki fejlődést abból a feltevésből kiindulva, hogy az invenció folyamata a tapasztalat "hosszának" a függvénye. A technikai fejlődés exogén változókénti kezelése maga után vonja annak semlegeskénti felfogását, hiszen a semleges technikai haladás lényege az időelemzés.

Bevezeti a meg nem testesült műszaki fejlődés fogalmát, amivel a tőkeakkumuláció ütemétől és nagyságától független műszaki fejlődést jelöl. Nem megtestesült technikai fejlődésnek definiál minden olyan a termelési függvényekben bekövetkező eltolódást, amely nem érinti a helyettesítési határarányt, azaz Hicks-értelemben semleges műszaki fejlődést tételez fel. Ez a fejlődés a tőkeakkumuláció nagyságától és ütemétől független, nem ölt tárgyi formát a tőke struktúrájában vagy/és egyes elemeinek minőségi

[26] Solow, R.: [1988]., 307-318. p.
[27] Solow, R. [1956] 65-94. p.

változásában. Alapja a termelési tényezők működésének tökéletesedése, a termelési eszközök használatával kapcsolatos ismeretek gyarapodása.[28]

Solow a meg nem testesült műszaki fejlődést, A(t)-t exogénként kezeli, és a közjavak csoportjába sorolja (nem kizárható és nem rivalizáló). Shell [1966, 1967] szintén a közjavakhoz sorolja, amelyről a kormányzat gondoskodik. E felfogásoknál a műszaki ismeretek, azaz az A(t) tényező állománya *ellenszolgáltatás nélkül, szabadon kiterjeszthető.* Feltételezik, hogy a technológia változás generálásában a magánérdek, a profit-maximalizáló magatartás nem játszik szerepet.

Solow [1956] növekedési modellje:

$$Y(t) = K(t)^{\alpha} (A(t)L(t))^{1-\alpha} \qquad 0<\alpha<1$$

ahol: Y(t) = az output;

K(t) = a tőke;

L(t) = a munka

A(t) = a technológiai fejlődést kifejező változó.

A munkaerő és a technikai fejlődést exogén növekedési rátája "n" és "g":

$$L(t) = L(0)e^{nt}$$

$$A(t) = A(0)e^{g(t)}$$

A munkaerő effektív egysége, A(t)L(t) tehát "n+g" rátával nő. A modell feltételezi, hogy az output konstans, s-ed részét beruházásokra fordítják. k legyen az effektív munka egy egységére jutó tőkeállomány, $k = \frac{K}{AL}$ és y legyen az effektív munka egy egységére jutó kibocsátás, $y = \frac{Y}{AL}$. Ekkor a tőke-állomány effektív munkaegységre jutó változása:

$$k(t)=sy(t)-(n+g+\delta)k(t)=sk(t)^{\alpha}-(n+g+\delta)k(t) \qquad (2)$$

ahol: δ = az értékcsökkenés ráta.

(2) egyenletből következik, hogy k egy olyan k^* állandó értékhez konvergál, amit $sk^{*\alpha}=(n+g+\delta)k^*$, azaz $k^* = [\frac{s}{n+g+\delta}]^{\frac{1}{1-\alpha}}$ definiál. Tehát állandó növekedésnél a tőke-munka hányada annál nagyobb, minél nagyobb a megtakarítási rátája. A Solow modell egyszerűen biztosítja annak az összefüggésnek a kvantifikálását, amely a jövedelem állandó növekedése és a megtakarítási ráta, valamint a népesség növekedése között van. A Harrod-Domar modellel ellentétben magyarázatot ad a különböző országok eltérő növekedési ütemére.

---

[28] Matematikailag egy időbeli eltolódást kifejező vektor segítségével fejezhető ki:

$Y(t) = A(t) f(K,L)$ A(t)-t leggyakrabban exponenciális függvénnyel közelítjük:

$Y(t) = Be^{\lambda t} f(K,L)$

ahol: Y(t) = a t időpontbeli kibocsátás

A(t) = a meg nem testesült technikai fejlődés általános indexe

K = a felhasznált tőkeállomány

L = a munkaráfordítás.

(2)-t a termelési függvénybe helyettesítve és mindkét oldal logaritmusát véve, az egy főre jutó jövedelem folyamatos növekedési üteme:

$$\ln[\frac{Y(t)}{L(t)}] = (1-\alpha)\ln A(0) + (1-\alpha)gt + \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(s) - \frac{\alpha}{1-\alpha}\ln(n+g+\delta)$$

Mivel a modell feltételezi, hogy a termelési tényezőket marginális termékükön értékelik, így a munkaerő effektív egysége és a megtakarítások növekedési koefficienseit a modell alapján meg lehet becsülni. Azaz, ha a tőke jövedelem részaránya 1/3, akkor az egy főre jutó jövedelem megtakarítási ráta szerinti elaszticitása 0,5 és (n+g+δ)-szerinti elaszticitása -0,5.[29]

Solow [1957] aggregált modelljében tényezőkre bontotta a növekedést, a kibocsátás növekedését az input tényezők növekedése súlyozva a kompetitív tényező jövedelem arányokkal összegére és egy rezidumra vezette vissza.[30] A rezidumot technikai fejlődésként fogta fel.

Matematikai modellje:

$$\Delta y_t - \beta_t \Delta x_t = \Delta \log A(t) \qquad (3)$$

β = a munka termelési elaszticitása;

ahol: Δ y= a kibocsátás-tőke hányad növekedési rátája $(\Delta \log \frac{Y}{K})$

Δ x = a munka-tőke hányad növekedési rátája $(\Delta \log \frac{L}{K})$;

Δ log A(t)= a Hicks-féle semleges technikai fejlődés növekedési rátája.

A modell feltételezi, hogy a termelés növekedése a munkaerő és a tőke növekedésétől, jövedelemtermeléshez való hozzájárulásuktól és műszaki fejlődéstől függ. A termelékenység növekedési rátájának becslésére a (3) egyenlet baloldalának becslését ajánlotta.

Az egyenlet jobb oldala "Solow rezidumként" vált ismertté. Kompetitív piac és konstans skálahozadék feltételezése mellett a munkaerő jövedelemrészesedésének aránya $(\beta = \frac{r_L L}{Y})$ a termelési függvény munka szerinti elaszticitásával egyezik meg, azaz a munka termelési elaszticitását direkt módon tartalmazzák a jövedelemadatok. A

[29] Cobb-Douglas típusú termelési függvényeknél általában α =1/3, tehát a tőke termelési elaszticitása 1/3. Azaz, ha a tőke jövedelem részaránya 1/3, akkor az egy főre jutó jövedelem megtakarítási ráta szerinti elaszticitása 0,5 és (n+g+δ) - szerinti elaszticitása - 0.5. A megtakarítási ráta, az egy főre jutó jövedelem növekedési üteme és a népesség növekedési üteme ismeretében a technológiai fejlődés növekedési üteme megbecsülhető. A modell egyszerűen biztosítja ennek az összefüggésnek a kvantifikálását, ami a jövedelem állandó növekedése és a megtakarítási ráta, valamint a népesség növekedése között van. *Mankiewich*, G - *Romer*, D - *Weil*, D [1992] 410. p..

[30] *Solow*, R.[1957]. 65-94. p.

termelékenység növekedési rátáját e képlet alapján egyszerűen megkaphatjuk, ha az egységnyi munkára jutó tőkefelhasználás növekedési rátájából levonjuk az egységnyi tőkére jutó munka növekedési rátájának és a munka termelési elaszticitásának a szorzatát.

Solow a termelékenység növekedési rátáját éves adatok alapján becsülte, és arra a következtetésre jutott, hogy a termelékenység növekedésének van egy konstans eleme és egy olyan eleme, amely a véletlentől függ. Azaz a (3) a következő alakot ölti:

$$\Delta y_t - \beta_t \Delta x_t = \theta + u_t$$

ahol: θ = az időtől független konstant eleme a termelékenységnek
u_t = a termelékenység véletlentől függő idősora.

Mindkét modellnél (Solow [1956] és [1957] a meg nem testesült technikai változás Solow féle általános indexe három restriktív feltételen alapszik: konstans skála hozadék, Hicks-féle semleges technikai változás feltételezése és az a hipotézis, hogy mind az outputok, mind az input tényezők piacán tökéletes verseny uralkodik. Ezen feltételek mellett, a technikai fejlődést a teljes termelékenység növekedésével azonosította.

Ha a termelési technológia ezen feltételeknek nem felel meg, azaz, ha a termelési technológia általánosabb, akkor a teljes termelékenység növekedésére és a technikai változás között nincs ekvivalencia. Pl., ha a technológiában növekvő skála hozadék lép fel, vagy a műszaki fejlődés nem semleges, vagy a költségfüggvény nem konvex.[31]

Solow e modelljeivel, felfogásával kapcsolatos ellenvetések négy fő kérdés köré csoportosíthatók: egyrészt nyilvánvaló, hogy Solow [1957] modellje a gazdasági növekedés egy jelentős részét reziduális elemként kezeli, és így ez a magyarázat aligha minősíthető a gazdasági növekedés kielégítő elemzésének. Másrészt nehezen fogadható el az a feltevés, hogy a műszaki fejlődés független a beruházásoktól, hiszen kétségtelen, hogy a műszaki fejlődés nagy részének új állóalapokban kell megtestesülnie, így tehát a nagyobb beruházás feltétlenül előmozdítja a műszaki fejlődést is. Harmadrészt a műszaki fejlődést a termelési függvény eltolódásaként fogja fel.

A technikai fejlődés egy általános indexe, A(t), magában foglalja a termelési függvény bármilyen eltolódását. Azaz A(t) nemcsak az időben zajló technikai változást, hanem pl. a rövidtávú konjunkturális jellegű változások, az időjárás, stb. hatásait is tartalmazza. Negyedszer nem vette figyelembe a megtestesült műszaki fejlődés hatását, elhanyagolta a helyettesítési határráta megváltozását. Az eredményként kapott műszaki fejlődés lényegesen kisebb mint a tényleges, hiszen ezek a függvénytípusok alkalmatlanok a beruházások tényleges hozadékának kimutatására. *A tőkefelhalmozás hozadékának tünteti fel a tőke korszerűsödésének hatását is.* Ezek a megoldások tehát - a műszaki haladás semleges jellegű feltételezése miatt - a technikai fejlődés és a tőkefelhalmozás hatásának szétválasztására nem igazán alkalmasak, a két hatásra nem adnak reális, kielégítő becslést.

A megtestesült műszaki fejlődés koncepciója azon az alapvető feltételezésen alapul, hogy a műszaki újítások jelentős része új állóalapokban testesül meg, hogy a műszaki fejlődés általában megváltoztatja a termelési tényezők helyettesítési arányait, azaz nem hagyja változatlanul a termelési elaszticitásokat.

[31] A monopolpiac egyik megnyilvánulása, hogy a kibocsátás változásától a határköltség nem függ. A határköltség függvényt egy vízszintes egyenes reprezentálja.

Solow [1959] megtestesült technikai fejlődést kifejező modelljében a műszaki fejlődés endogén változójú. A termelési alapokban megtestesült műszaki fejlődés figyelembevétele azon a hipotézisen alapszik, hogy a tőkeberuházások a létesítés időpontjában a rendelkezésre álló legmagasabb technikai szintet testesítik meg, és így a tőke régebbi évjáratai kevésbé korszerűek. E megközelítés matematikai formalizálásához a tőkét évjáratokra bontja:[32]

$$Y_v(t) = Be^{\lambda t} L_v(t)^{\alpha} K_v(t)^{1-\alpha}$$

ahol: $Y_v(t)$ = a $t \geqq v$ időpontban a v évjáratú berendezéssel elért output,

$K_v(t)$ = a t időpontban rendelkezésre álló tőke,

$L_v(t)$ = a $K_v(t)$ tőkéhez tartozó munkaerő.

Solow [1962] egy másik modelljében a műszaki fejlődés és a beruházások kapcsolatát vizsgálta. Alapvetően abból indult ki, hogy a későbbi időpontban üzembe helyezett létesítmény hatékonyabb, mint a korábbi. Konstans hozadék fel-tételezése mellett tőkeévjáratos modellel közelíti a meg-testesült műszaki fejlődést. Termelési függvénye a következő alakú:[33]

$$Y(t) = Be^{\lambda t} L(t)^{\alpha} J(t)^{1-\alpha}$$

ahol:

$$J(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\sigma v} I(v)dv$$

$I(v)$ = a t időpontban eszközölt bruttó beruházás

$(t \geqq v)$

$$\sigma = \delta + \frac{\lambda}{1-\alpha}$$

δ = a tőke avulásának üteme

λ = a meg nem testesült műszaki fejlődés üteme.

A modellt a konstans hozadék feltételezése egyszerűbbé, könnyebben kezelhetővé teszi, de ez a megkötés egyúttal azt is eredményezi, hogy *az eredményként kapott műszaki fejlődés a növekvő hozamok hatását is tartalmazhatja,* azaz a technikai fejlődés így kimutatott üteme magasabb lehet a tényleges ütemnél (ha a volumen hozadéka nem konstans). Tehát ez a megoldás is irreális becslést ad a műszaki fejlődés nagyságára.

Kaldor koncepciója alapvetően eltér Solowétól és más neoklasszikus közgazdászétól. *Véleménye szerint a technikai fejlődés és a tőkeakkumuláció növekedésre gyakorolt hatásának szétválasztása nem megalapozott, erőltetett, gyakorlatilag lehetetlen.* Véleménye szerint a tőke növelése bizonyos mértékben fejlettebb technika alkalmazását vonja maga után, így a növekvő hozamok nemcsak a tőke felhasználásához, hanem a technikai fejlődéshez is kötődnek. Ebből vonja le azt a következtetést, hogy nincs megalapozott indok a kétféle hatás szétválasztására. Növekedési modellje egy technikai

[32] *Solow,* R.: [1960] 89-104. p.
[33] *Solow,* R.: [1962.] 76-86. p.

haladás függvényre épül, amely az egy főre jutó tőke és az egy főre jutó termékmennyiség növekedése közötti kapcsolatot reprezentálja.[34]

Intriligator modellje tartalmazza mind a meg nem testesült, mind a megtestesült műszaki fejlődést, amelyeket exogénként fog fel. A meg nem testesült technikai haladást a függvény eltolódásaival és a minőségi változások szerint súlyozott munkafelhasználással, a megtestesült fejlődést pedig a tőke indexeinek a minőségi változások szerinti súlyozásával fejezi ki.[35]

$$Y(t) = Be^{\mu\lambda} J(t)^{\alpha} M(t)^{1-\alpha}$$

ahol: μ=a meg nem testesült műszaki fejlődés üteme,

J(t) = a minőségi változások szerint súlyozott tőke,

M(t) = a minőségi változások szerint súlyozott munka.

A termelési függvények a műszaki fejlődésnek tulajdonítható hatás és a tőkefelhalmozás hatásának a szétválasztását általában úgy oldják meg, hogy az előbbi tényezőnek tulajdonítható változást a függvény eltolódásával, az utóbbit pedig a függvény mentén való mozgással fejezik ki. Az

$$Y = A(t)L(t)^{\alpha} K(t)^{\beta} \qquad (4)$$

függvénynél $\alpha + \beta$ a tőke és a munka hozadékát fejezi ki, A(t) pedig a technikai haladást kifejező tényező.

A (4) függvény empirikus vizsgálatánál komoly nehézségek merülnek fel. A tőke és a kifejtett munkamennyiség hosszú időszakot tekintve növekvő trendet mutat, feltehetően a műszaki fejlődés is gyorsul az időben, azaz A(t) trendje is növekvő. *Így a műszaki haladásnak és a volumen hozadékának a hatása együttesen jelentkezik az adatokban.* Ha K(t) is és L(t) is változik, akkor a termelés változása a termelési tényezők mennyiségi változására és/vagy a műszaki fejlődés hatására vezethető vissza. A vizsgált időszakban nem figyelhető meg elegendően nagy számú, egymástól független változás egyszer a termelési tényezők mennyiségi növekedésére, másszor a technikai változásra vonatkozóan.[36]

A termelési függvények, mint modellek alkalmasak a két hozadék hatása elkülönítésére, számszerűsítésére, a nehézségek a műszaki fejlődés mérésének problémájára vezethetők vissza. A technikai haladás rendkívül összetett minőségi jel-legű változás a tőkében, a technológiában, a termékben, a munkaerő szakképzettségében, a munka-, üzemszervezés vezetés színvonalában stb. Mindezeket a változásokat egy komplex mutatóval kifejezni nem lehet, az egyes mutatók csak közelítik a valóságot, de nem tükrözik vissza teljes részletességében. A műszaki fejlődés hozadékának mérési eredménye ennek megfelelően csakis annyiban reális, amennyiben a műszaki fejlődést kifejező mutató jellemzi a technikai haladást.

[34] *Kaldor*, N.: [1957.]591-625. p.

[35] *Intriligator*, D.: [1956.] 65-70. p.

[36] Ugyanazon termelési-technikai szintekhez kapcsolódóan rendelkezni kellene különböző nagyságú termelési tényezőkhöz tartozó termelési értékekkel.

Felhasznált irodalom

Cass, David: „Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation" Rev. Econ. Studies [1965] july 223–240 p.

Domar, E. D.: „Capital Expansion, Rate of Growth, and Employment" Econometrica [1947] 137–147. p.

Gordon, N. N.: „Ex Ante and Ex Post Substitutability in Economic Growth" International Economic Review [1973] 2. 497–511 p.

Harrod, R. F.: „Towards a Dynamic Economics" [1948] London.

Intriligator: „A megtestesült technikai változás és a termelékenység az Egyesült Államokban 1929–1958" „A gazdasági növekedés feltételei" KJK [1967] 163. p.

Kaldor, N.: „A Modell of Economic Growth".

The Economic Journal [1957] december 591–626. p.

Koopmans, T. C.: „On the Concept of Optimal Economic Growth" The Econometric Approach to Development Planning. Amsterdam [1965].

Mankiewich, N. G. – *Romer* D. – *Weil*, D. N. „A Contribution to the Empirics of Economic Growth" Quarterly Journal of Economics [1992] May, 407–436. p.

Mátyás Antal „A polgári közgazdaságtan története az 1870-es évektől napjainkig" KJK BP [1979].

Ramsey, F. P.: „A Mathematical Theory of Saving." Economic Journal [1928] 38. 543–549. p.

Robinson, J: „The Economics of Imperfect Competition" London [1938].

Samuelson, R. M.: „A Contriubution to the Theory of Economic Growth" Quarterly Journal of Economic [1956] 70. 65–94. p.

„Technical Change and the Aggregate Production Function" Review of Economic and Statistics [1957] 39. 312–320. p.

„Investment and Technical Progress" Mathematical Methods in the Social Sciences, Stanford University Press [1960].

„Growth Theory and After" The American Economic Review [1988] June 307–318. p.

ADÉL ANDRÁSSY

THE SEPARATION OF THE SUBSTITUTION OF PRODUCTION FACTORS AND THE TECHNOLOGICAL PROCESS IN THE NEO-CLASSICAL THEORY

(Summary)

The object of the article is to present some aspects of neoclassical growth theory. The most research centers on macroeconomic theory, on aggregate production functions and their implications for aggregate input substitution, distribution and technological progress. Since the behavior of these aggregates has a material effect upon the national economy, there has been a concomitant rise in the interest attached to econometric studies of production, distriubution and technological progress.

The neoclassical theory is based upon the assumption that there are no fixed, nonangmentable factors of production. The basic features of the neoclassical growth model: closed economy with competitive markets; identical rational individuals; and a production technology exhibiting diminishing return to capital and labor separately and constant returns to both input jointly; population and labor growth are exogenous to the model, as is disembodied technological change; and no distinct productive role is assigned to human capital or government policy.